历史与问题引导下的高等代数教学探索

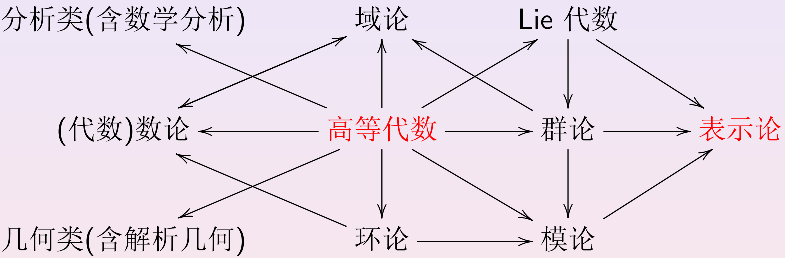
朱富海

南京大学数学系

闽南师范大学, 2023 年 3 月 25 日

<u>高等代数的地位：所有数学学科的基础</u>

高等代数的地位：所有数学学科的基础



- 整体性与连贯性：整个高等代数课程是一个整体，辐射成整个代数学乃至数学分支.

主要思路：以历史为线索、以问题为导向、走前人走过的路

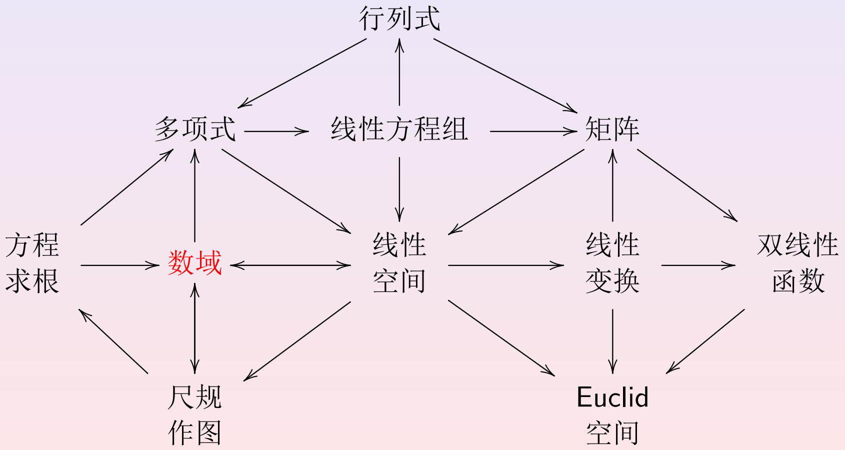
主要思路: 以历史为线索、以问题为导向、走前人走过的路

主要原则: 尽可能自然而然、合乎逻辑

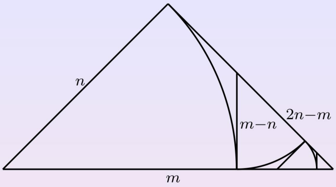
高等代数整体框架

主要思路: 以历史为线索、以问题为导向、走前人走过的路

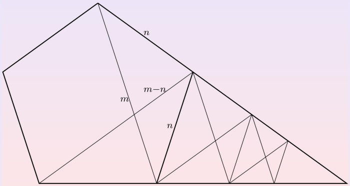
主要原则: 尽可能自然而然、合乎逻辑



- 无理数的发现



- 无理数的发现：$\sqrt{2}$



- 无理数的发现：$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$

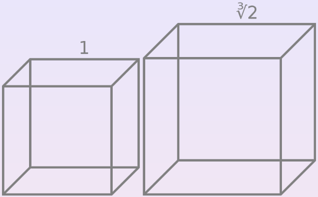
$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

- 无理数的发现: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$
- 问题: 从 $\sqrt{2}$ 出发用四则运算能得到哪些数?

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

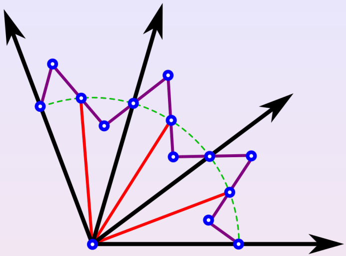
- 无理数的发现: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$
- 问题: 从 $\sqrt{2}$ 出发用四则运算能得到哪些数?
- 数域的引入

起点：尺规作图与数域



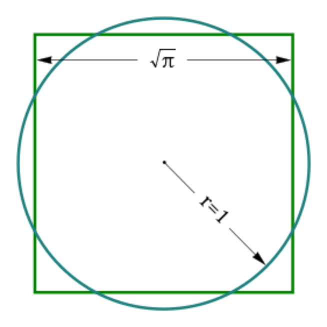
- 无理数的发现: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$
- 问题: 从 $\sqrt{2}$ 出发用四则运算能得到哪些数?
- 数域的引入
- 尺规作图相关数域: $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$

起点：尺规作图与数域

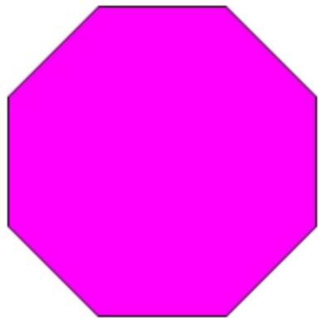


- 无理数的发现：$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$
- 问题：从 $\sqrt{2}$ 出发用四则运算能得到哪些数?
- 数域的引入
- 尺规作图相关数域：$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\cos 20^\circ)$

起点：尺规作图与数域

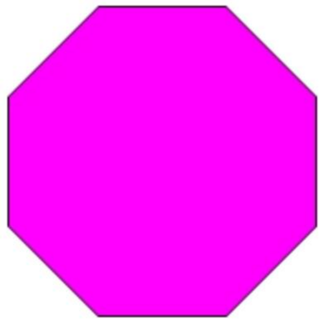


- 无理数的发现：$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$
- 问题: 从 $\sqrt{2}$ 出发用四则运算能得到哪些数?
- 数域的引入
- 尺规作图相关数域: $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\cos 20^\circ)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})$



- 无理数的发现：$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$
- 问题：从 $\sqrt{2}$ 出发用四则运算能得到哪些数?
- 数域的引入
- 尺规作图相关数域：$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\cos 20^\circ)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})$, $\mathbb{Q}(\xi_n)$

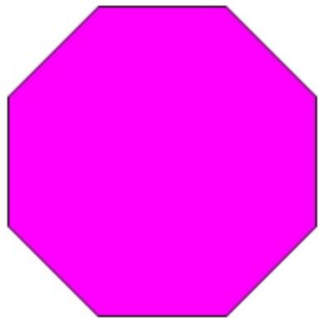
起点：尺规作图与数域



- 无理数的发现: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$
- 问题: 从 $\sqrt{2}$ 出发用四则运算能得到哪些数?
- 数域的引入
- 尺规作图相关数域: $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\cos 20^\circ)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})$, $\mathbb{Q}(\xi_n)$

拓展问题 (尺规作图)

尺规作图与数域的关系



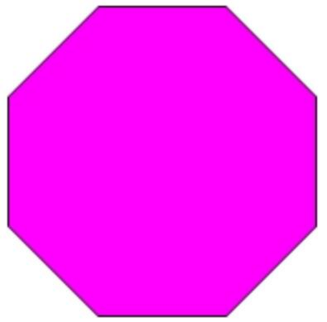
- 无理数的发现：$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$
- 问题：从 $\sqrt{2}$ 出发用四则运算能得到哪些数？
- 数域的引入
- 尺规作图相关数域：$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\cos 20^\circ)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})$, $\mathbb{Q}(\xi_n)$

拓展问题 (尺规作图)

尺规作图与数域的关系

拓展问题 (方程求根)

(1) 包含一个有理方程(或有理系数多项式)的一个根的最小数域?



- 无理数的发现：$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$
- 问题：从 $\sqrt{2}$ 出发用四则运算能得到哪些数？
- 数域的引入
- 尺规作图相关数域：$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\cos 20^\circ)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})$, $\mathbb{Q}(\xi_n)$

拓展问题 (尺规作图)

尺规作图与数域的关系

拓展问题 (方程求根)

(1) 包含一个有理方程(或有理系数多项式)的一个根的最小数域？
(2) 包含一个有理方程(或有理系数多项式)的所有根的最小数域？

$$
\begin{tikzcd}
 & & \text{一元多项式} \arrow[dr] & \\
\text{数域} \arrow[r] & \text{方程} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{array}{c}\text{多元多项式}\\ \text{对称多项式}\end{array} \arrow[dl] \\
 & & \text{多元一次方程组} &
\end{tikzcd}
$$

- 国内高等代数教材对于多项式理论部分的安排
  1. 先讲多项式, 再讲行列式、线性方程组和矩阵等
  2. 把多项式部分放在线性空间和线性变换之间, 也就是多项式理论是一个工具, 需要用时再讲

- 国内高等代数教材对于多项式理论部分的安排
  1. 先讲多项式, 再讲行列式、线性方程组和矩阵等
  2. 把多项式部分放在线性空间和线性变换之间, 也就是多项式理论是一个工具, 需要用时再讲
- 个人考虑: 多项式不仅仅是工具, 而是一个系统的研究对象, 并且在高等代数的几乎每一章都需要

- 国内高等代数教材对于多项式理论部分的安排
  1. 先讲多项式, 再讲行列式、线性方程组和矩阵等
  2. 把多项式部分放在线性空间和线性变换之间, 也就是多项式理论是一个工具, 需要用时再讲
- 个人考虑: 多项式不仅仅是工具, 而是一个系统的研究对象, 并且在高等代数的几乎每一章都需要
  1. 行列式: 多元多项式; 利用多项式的根或因式计算行列式

- 国内高等代数教材对于多项式理论部分的安排
  1. 先讲多项式, 再讲行列式、线性方程组和矩阵等
  2. 把多项式部分放在线性空间和线性变换之间, 也就是多项式理论是一个工具, 需要用时再讲
- 个人考虑: 多项式不仅仅是工具, 而是一个系统的研究对象, 并且在高等代数的几乎每一章都需要
  1. 行列式: 多元多项式; 利用多项式的根或因式计算行列式
  2. 矩阵: 矩阵多项式或矩阵方程如 $A^2 = A$

- 国内高等代数教材对于多项式理论部分的安排
  1. 先讲多项式, 再讲行列式、线性方程组和矩阵等
  2. 把多项式部分放在线性空间和线性变换之间, 也就是多项式理论是一个工具, 需要用时再讲
- 个人考虑: 多项式不仅仅是工具, 而是一个系统的研究对象, 并且在高等代数的几乎每一章都需要
  1. 行列式: 多元多项式; 利用多项式的根或因式计算行列式
  2. 矩阵: 矩阵多项式或矩阵方程如 $A^2 = A$
  3. 线性空间: $\mathbb{F}[x]$, $\mathbb{F}[x]_n$

- 国内高等代数教材对于多项式理论部分的安排
  1. 先讲多项式, 再讲行列式、线性方程组和矩阵等
  2. 把多项式部分放在线性空间和线性变换之间, 也就是多项式理论是一个工具, 需要用时再讲
- 个人考虑: 多项式不仅仅是工具, 而是一个系统的研究对象, 并且在高等代数的几乎每一章都需要
  1. 行列式: 多元多项式; 利用多项式的根或因式计算行列式
  2. 矩阵: 矩阵多项式或矩阵方程如 $A^2 = A$
  3. 线性空间: $\mathbb{F}[x]$, $\mathbb{F}[x]_n$
  4. 线性映射: 求导

- 国内高等代数教材对于多项式理论部分的安排
  1. 先讲多项式，再讲行列式、线性方程组和矩阵等
  2. 把多项式部分放在线性空间和线性变换之间，也就是多项式理论是一个工具，需要用时再讲
- 个人考虑：多项式不仅仅是工具，而是一个系统的研究对象，并且在高等代数的几乎每一章都需要
  1. 行列式：多元多项式；利用多项式的根或因式计算行列式
  2. 矩阵：矩阵多项式或矩阵方程如 $A^2 = A$
  3. 线性空间：$\mathbb{F}[x]$, $\mathbb{F}[x]_n$
  4. 线性映射：求导
  5. 线性变换：特征多项式、零化多项式、最小多项式

- 国内高等代数教材对于多项式理论部分的安排
  1. 先讲多项式, 再讲行列式、线性方程组和矩阵等
  2. 把多项式部分放在线性空间和线性变换之间, 也就是多项式理论是一个工具, 需要用时再讲
- 个人考虑: 多项式不仅仅是工具, 而是一个系统的研究对象, 并且在高等代数的几乎每一章都需要
  1. 行列式: 多元多项式; 利用多项式的根或因式计算行列式
  2. 矩阵: 矩阵多项式或矩阵方程如 $A^2 = A$
  3. 线性空间: $\mathbb{F}[x]$, $\mathbb{F}[x]_n$
  4. 线性映射: 求导
  5. 线性变换: 特征多项式、零化多项式、最小多项式
  6. 线性函数: 多项式赋值

- 国内高等代数教材对于多项式理论部分的安排
  1. 先讲多项式, 再讲行列式、线性方程组和矩阵等
  2. 把多项式部分放在线性空间和线性变换之间, 也就是多项式理论是一个工具, 需要用时再讲
- 个人考虑: 多项式不仅仅是工具, 而是一个系统的研究对象, 并且在高等代数的几乎每一章都需要
  1. 行列式: 多元多项式; 利用多项式的根或因式计算行列式
  2. 矩阵: 矩阵多项式或矩阵方程如 $A^2 = A$
  3. 线性空间: $\mathbb{F}[x]$, $\mathbb{F}[x]_n$
  4. 线性映射: 求导
  5. 线性变换: 特征多项式、零化多项式、最小多项式
  6. 线性函数: 多项式赋值
  7. 双线性函数与二次型: 二次齐次多项式

- 国内高等代数教材对于多项式理论部分的安排
  1. 先讲多项式，再讲行列式、线性方程组和矩阵等
  2. 把多项式部分放在线性空间和线性变换之间，也就是多项式理论是一个工具，需要用时再讲
- 个人考虑：多项式不仅仅是工具，而是一个系统的研究对象，并且在高等代数的几乎每一章都需要
  1. 行列式：多元多项式；利用多项式的根或因式计算行列式
  2. 矩阵：矩阵多项式或矩阵方程如 $A^2 = A$
  3. 线性空间：$\mathbb{F}[x]$, $\mathbb{F}[x]_n$
  4. 线性映射：求导
  5. 线性变换：特征多项式、零化多项式、最小多项式
  6. 线性函数：多项式赋值
  7. 双线性函数与二次型：二次齐次多项式
  8. Euclid 空间：多项式空间的内积

(Lagrange 插值公式) 设 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{F}$, 且 $i \neq j$ 时, $a_i \neq a_j$, 则存在唯一的次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(a_i) = b_i$: $f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i F_i(x)$, 其中 $F_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x-a_j}{a_i-a_j}$.

(Lagrange 插值公式) 设 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{F}$, 且 $i \neq j$ 时, $a_i \neq a_j$, 则存在唯一的次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(a_i) = b_i$: $f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i F_i(x)$, 其中 $F_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$.

设 $f_1(x), \cdots, f_m(x) \in \mathbb{F}[x]$ 两两互素, $r_1(x), \cdots, r_m(x) \in \mathbb{F}[x]$, 则存在 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使得

$$\begin{cases} f(x) \equiv r_1(x) \pmod{f_1(x)}, \\ f(x) \equiv r_2(x) \pmod{f_2(x)}, \\ \qquad \cdots\cdots \\ f(x) \equiv r_m(x) \pmod{f_m(x)}. \end{cases}$$

1. 中国剩余定理

(Lagrange 插值公式) 设 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n\in\mathbb{F}$, 且 $i\neq j$ 时, $a_i\neq a_j$, 则存在唯一的次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(a_i)=b_i$: $f(x)=\sum_{i=1}^n b_iF_i(x)$, 其中 $F_i(x)=\prod_{j\neq i}\frac{x-a_j}{a_i-a_j}$.

设 $f(x)=c_0+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}$, 得

$$\begin{cases} c_0+c_1a_1+\cdots+c_{n-1}a_1^{n-1}=b_1, \\ c_0+c_1a_2+\cdots+c_{n-1}a_2^{n-1}=b_2, \\ \cdots\cdots \\ c_0+c_1a_n+\cdots+c_{n-1}a_n^{n-1}=b_n \end{cases}$$

1. 中国剩余定理
2. Vandermonde 行列式

(Lagrange 插值公式) 设 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{F}$, 且 $i \neq j$ 时, $a_i \neq a_j$, 则存在唯一的次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(a_i) = b_i$: $f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i F_i(x)$, 其中 $F_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{x-a_j}{a_i-a_j}$.

求
$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

1. 中国剩余定理
2. Vandermonde 行列式
3. Vandermonde 矩阵的逆矩阵

Lagrange 插值定理

(Lagrange 插值公式) 设 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{F}$, 且 $i \neq j$ 时, $a_i \neq a_j$, 则存在唯一的次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(a_i) = b_i$: $f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i F_i(x)$, 其中 $F_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{x-a_j}{a_i-a_j}$.

令 $F_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{x-a_j}{a_i-a_j}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则 $F_1(x), F_2(x), \cdots, F_n(x)$ 线性无关, 从而是 $\mathbb{F}[x]_n$ 的一组基.

1. 中国剩余定理
2. Vandermonde 行列式
3. Vandermonde 矩阵的逆矩阵
4. 线性空间

Lagrange 插值定理

(Lagrange 插值公式) 设 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{F}$, 且 $i \neq j$ 时, $a_i \neq a_j$, 则存在唯一的次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(a_i) = b_i$: $f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i F_i(x)$, 其中 $F_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x-a_j}{a_i-a_j}$.

对互不相同的 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$, 定义映射 $\mathscr{A} : \mathbb{F}[x]_n \to \mathbb{F}^{1\times n}$ 为

$$\mathscr{A}(f(x)) = (f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n)).$$

则 $\mathscr{A}$ 是线性同构.

1. 中国剩余定理
2. Vandermonde 行列式
3. Vandermonde 矩阵的逆矩阵
4. 线性空间
5. 线性映射

(Lagrange 插值公式) 设 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{F}$, 且 $i \neq j$ 时, $a_i \neq a_j$, 则存在唯一的次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(a_i) = b_i$: $f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i F_i(x)$, 其中 $F_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x-a_j}{a_i-a_j}$.

对任意 $a \in \mathbb{F}$, 定义 $\mathbb{F}[x]$ 上线性函数为 $\nu_a(f(x)) = f(a)$, 则对互不相同的 a_1, $\cdots, a_n \in \mathbb{F}$, $\nu_{a_1}, \cdots, \nu_{a_n}$ 线性无关, 为 $\mathbb{F}[x]_n^*$ 的一组基, 其在 $\mathbb{F}[x]_n$ 上的对偶基恰为$F_i(x)$.

1. 中国剩余定理
2. Vandermonde 行列式
3. Vandermonde 矩阵的逆矩阵
4. 线性空间
5. 线性映射
6. 线性函数

(Lagrange 插值公式) 设 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n\in\mathbb{F}$, 且 $i\neq j$ 时, $a_i\neq a_j$, 则存在唯一的次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(a_i)=b_i$: $f(x)=\sum_{i=1}^n b_iF_i(x)$, 其中 $F_i(x)=\prod_{j\neq i}\frac{x-a_j}{a_i-a_j}$.

对任意互不相同的 $a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$, 则 $(f(x),g(x))=\sum\limits_{i=1}^{n}f(a_i)g(a_i)$ 为 $\mathbb{R}[x]_n$ 上的内积, $F_i(x)$ 恰为一组标准正交基.

1. 中国剩余定理
2. Vandermonde 行列式
3. Vandermonde 矩阵的逆矩阵
4. 线性空间
5. 线性映射
6. 线性函数
7. 内积

问题

算术基本定理与一元多项式的因式分解存在唯一性定理如何证明?

一元多项式理论的核心问题

问题

算术基本定理与一元多项式的因式分解存在唯一性定理如何证明？

$$\begin{tikzcd}
\text{带余除法} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Bézout 定理} \arrow[r] \arrow[d] & \text{因式分解存在唯一性} \arrow[d] \\
\text{Euclid 环} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{主理想整环} \arrow[r] \arrow[d] & \text{唯一析因环} \arrow[dl] \\
\text{素数} & \text{素元与不可约元} \arrow[l] \arrow[r] & \text{不可约多项式}
\end{tikzcd}$$

问题

算术基本定理与一元多项式的因式分解存在唯一性定理如何证明？

$$
\begin{tikzcd}
\text{带余除法} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Bézout 定理} \arrow[r] \arrow[d] & \text{因式分解存在唯一性} \arrow[d] \\
\text{Euclid 环} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{主理想整环} \arrow[r] \arrow[d] & \text{唯一析因环} \arrow[dl] \\
\text{素数} & \text{素元与不可约元} \arrow[l] \arrow[r] & \text{不可约多项式}
\end{tikzcd}
$$

拓展问题

(1) $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 等集合上因式分解、素数判别等问题.

问题

算术基本定理与一元多项式的因式分解存在唯一性定理如何证明?

$$
\begin{tikzcd}
\text{带余除法} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Bézout 定理} \arrow[r] \arrow[d] & \text{因式分解存在唯一性} \arrow[d] \\
\text{Euclid 环} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{主理想整环} \arrow[r] \arrow[d] & \text{唯一析因环} \arrow[dl] \\
\text{素数} & \text{素元与不可约元} \arrow[l] \arrow[r] & \text{不可约多项式}
\end{tikzcd}
$$

拓展问题

(1) $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 等集合上因式分解、素数判别等问题.
(2) Lie 代数: $\mathbb{F}[x]$ 上与求导性质类似的变换、三维向量的外积及后面的矩阵上的求导

- Viéta 定理：一元多项式的根与多元多项式

- Viéta 定理: 一元多项式的根与多元多项式
- 一元多项式的根与方程组的关系:
  1. 古巴比伦人: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 - x_2 = ? \end{cases}$

- Viéta 定理：一元多项式的根与多元多项式
- 一元多项式的根与方程组的关系：
  1. 古巴比伦人：$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 - x_2 = ? \end{cases}$
  2. Vandemonde：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 = ?, \\ x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 = ?, \end{cases}$ 其中$\omega^3 = 1$

- Viéta 定理: 一元多项式的根与多元多项式
- 一元多项式的根与方程组的关系:
  1. 古巴比伦人: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 - x_2 = ? \end{cases}$
  2. Vandemonde: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 = ?, \\ x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 = ?, \end{cases}$ 其中$\omega^3 = 1$
  3. Lagrange 利用 Vandemonde 的想法统一解决三、四次方程的解, 发现五次以上方程的困难: 方程求根问题转化为线性方程组问题

问题

如何求解线性方程组？

问题

如何求解线性方程组？

《九章算术》的记载，即 Gauss 消元法

问题

如何求解线性方程组？

《九章算术》的记载，即 Gauss 消元法

问题

先讲行列式还是先讲矩阵？

问题

如何求解线性方程组?

《九章算术》的记载, 即 Gauss 消元法

问题

先讲行列式还是先讲矩阵?

- 将行列式作为矩阵研究的产物

问题

如何求解线性方程组?

《九章算术》的记载，即 Gauss 消元法

问题

先讲行列式还是先讲矩阵?

- 将行列式作为矩阵研究的产物
- 按照历史顺序，先行列式后矩阵

问题

如何求解线性方程组?

《九章算术》的记载, 即 Gauss 消元法

问题

先讲行列式还是先讲矩阵?

- 将行列式作为矩阵研究的产物
- 按照历史顺序, 先行列式后矩阵
  - 行列式: 关孝和(1683) 与 Leibniz (1693)

问题

如何求解线性方程组?

《九章算术》的记载, 即 Gauss 消元法

问题

先讲行列式还是先讲矩阵?

- 将行列式作为矩阵研究的产物
- 按照历史顺序, 先行列式后矩阵
  - 行列式: 关孝和(1683) 与 Leibniz (1693)
  - 矩阵运算: Cayley (1857 年前后), Binet (1812)

问题

如何定义行列式?

问题

如何定义行列式?

1. 第一行展开递推：二元求解公式到三元求解公式

问题

如何定义行列式?

1. 第一行展开递推: 二元求解公式到三元求解公式
2. 完全展开: 逆序数

问题

如何定义行列式?

1. 第一行展开递推: 二元求解公式到三元求解公式
2. 完全展开: 逆序数
3. 列向量的反对称多重线性函数

问题

如何定义行列式?

1. 第一行展开递推: 二元求解公式到三元求解公式
2. 完全展开: 逆序数
3. 列向量的反对称多重线性函数
4. 有向面积和体积

问题

如何定义行列式?

1. 第一行展开递推: 二元求解公式到三元求解公式
2. 完全展开: 逆序数
3. 列向量的反对称多重线性函数
4. 有向面积和体积
5. 外积

问题

如何定义行列式?

1. 第一行展开递推：二元求解公式到三元求解公式
2. 完全展开：逆序数
3. 列向量的反对称多重线性函数
4. 有向面积和体积
5. 外积
6. 乘积公式：满足$\varphi(AB)=\varphi(A)\varphi(B)$ 的函数

- Sylvester: 矩阵 matrix (1850)

- Sylvester: 矩阵 matrix (1850)
- Cayley: 1857 年左右考虑变量替换

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 = x_1, \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 = x_2. \end{cases}$$

- Sylvester: 矩阵 matrix (1850)
- Cayley: 1857 年左右考虑变量替换

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 = x_1, \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 = x_2. \end{cases}$$

将第二个方程组代入到第一个中可以得到一个新的方程组

$$\begin{cases} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})y_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})y_2 = c_1, \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})y_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})y_2 = c_2, \end{cases}$$

- Sylvester: 矩阵 matrix (1850)
- Cayley: 1857 年左右考虑变量替换

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 = x_1, \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 = x_2. \end{cases}$$

将第二个方程组代入到第一个中可以得到一个新的方程组

$$\begin{cases} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})y_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})y_2 = c_1, \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})y_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})y_2 = c_2, \end{cases}$$

其中系数矩阵

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

- Sylvester: 矩阵 matrix (1850)
- Cayley: 1857 年左右考虑变量替换

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 = x_1, \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 = x_2. \end{cases}$$

将第二个方程组代入到第一个中可以得到一个新的方程组

$$\begin{cases} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})y_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})y_2 = c_1, \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})y_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})y_2 = c_2, \end{cases}$$

其中系数矩阵

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

拓展问题

(1) 非交换环的例子, 结合代数

- Sylvester: 矩阵 matrix (1850)
- Cayley: 1857 年左右考虑变量替换

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 = x_1, \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 = x_2. \end{cases}$$

将第二个方程组代入到第一个中可以得到一个新的方程组

$$\begin{cases} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})y_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})y_2 = c_1, \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})y_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})y_2 = c_2, \end{cases}$$

其中系数矩阵

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

拓展问题

(1) 非交换环的例子, 结合代数
(2) 可逆矩阵全体作为群的例子, 行列式是群同态

从具体到抽象

$$
\begin{tikzcd}
\text{数域} \arrow[dr] & \text{多项式} \arrow[d] & \text{矩阵} \arrow[dl] \\
\text{列向量空间 } \mathbb{F}^n \arrow[r] & \text{线性空间} & AX=0 \text{ 的解空间} \arrow[l] \\
\text{平面向量} \arrow[ur] & \text{空间向量} \arrow[u] & \text{函数空间} \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

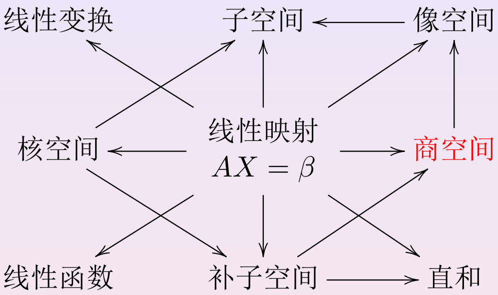
从具体到抽象

$$\begin{tikzcd}
\text{数域} \arrow[dr] & \text{多项式} \arrow[d] & \text{矩阵} \arrow[dl] \\
\text{列向量空间 } \mathbb{F}^n \arrow[r] & \text{线性空间} & AX = 0 \text{ 的解空间} \arrow[l] \\
\text{平面向量} \arrow[ur] & \text{空间向量} \arrow[u] & \text{函数空间} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

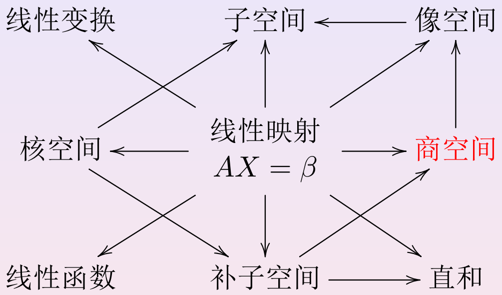
拓展问题

三大尺规作图难题的解决关键: 数域作为有理线性空间的维数

不同数学对象的联系



不同数学对象的联系



拓展问题

抽象的数学对象之间的映射、核、像、商、直和等的推广?
尤其是商的思想: 商群、商环、商代数等.

研究线性变换的整体思路：**运用多项式、行列式、矩阵和线性空间来系统解决一个大问题——Jordan 标准形**

研究线性变换的整体思路: **运用多项式、行列式、矩阵和线性空间来系统解决一个大问题——Jordan 标准形**

- 线性变换具有多种运算，与矩阵的关系(表示论的萌芽)

研究线性变换的整体思路: **运用多项式、行列式、矩阵和线性空间来系统解决一个大问题——Jordan 标准形**

- 线性变换具有多种运算，与矩阵的关系(表示论的萌芽)
- 同一个线性变换在不同基下的矩阵的关系: 相似

研究线性变换的整体思路: **运用多项式、行列式、矩阵和线性空间来系统解决一个大问题——Jordan 标准形**

- 线性变换具有多种运算，与矩阵的关系(表示论的萌芽)
- 同一个线性变换在不同基下的矩阵的关系: 相似
- 相似下的最简矩阵: 对角形

研究线性变换的整体思路：**运用多项式、行列式、矩阵和线性空间来系统解决一个大问题——Jordan 标准形**

- 线性变换具有多种运算，与矩阵的关系(表示论的萌芽)
- 同一个线性变换在不同基下的矩阵的关系：相似
- 相似下的最简矩阵：对角形
- 特征多项式、特征值、特征向量、特征子空间等

研究线性变换的整体思路: **运用多项式、行列式、矩阵和线性空间来系统解决一个大问题——Jordan 标准形**

- 线性变换具有多种运算，与矩阵的关系(表示论的萌芽)
- 同一个线性变换在不同基下的矩阵的关系: 相似
- 相似下的最简矩阵: 对角形
- 特征多项式、特征值、特征向量、特征子空间等
- 一般线性变换的准对角化: 不变子空间直和（需要零化多项式）

研究线性变换的整体思路: **运用多项式、行列式、矩阵和线性空间来系统解决一个大问题——Jordan 标准形**

- 线性变换具有多种运算，与矩阵的关系(表示论的萌芽)
- 同一个线性变换在不同基下的矩阵的关系: 相似
- 相似下的最简矩阵: 对角形
- 特征多项式、特征值、特征向量、特征子空间等
- 一般线性变换的准对角化: 不变子空间直和（需要零化多项式）
- 根子空间上的进一步分解: 幂零线性变换、循环子空间

研究线性变换的整体思路：**运用多项式、行列式、矩阵和线性空间来系统解决一个大问题——Jordan 标准形**

- 线性变换具有多种运算，与矩阵的关系(表示论的萌芽)
- 同一个线性变换在不同基下的矩阵的关系：相似
- 相似下的最简矩阵：对角形
- 特征多项式、特征值、特征向量、特征子空间等
- 一般线性变换的准对角化：不变子空间直和（需要零化多项式）
- 根子空间上的进一步分解：幂零线性变换、循环子空间
- Jordan 标准形(多项式矩阵可以作为补充)

拓展问题

表示论: 如何将数学对象转化为矩阵或线性变换?

拓展问题

表示论: 如何将数学对象转化为矩阵或线性变换?

1. 复数 $a+b\sqrt{-1}$ 与二阶实矩阵 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

拓展问题

表示论: 如何将数学对象转化为矩阵或线性变换?

1. 复数 $a+b\sqrt{-1}$ 与二阶实矩阵 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$
2. 数域与有理矩阵: $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mapsto \begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix}$

拓展问题

表示论: 如何将数学对象转化为矩阵或线性变换?

1. 复数 $a+b\sqrt{-1}$ 与二阶实矩阵 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$
2. 数域与有理矩阵: $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mapsto \begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix}$
3. 三元数不存在

拓展问题

表示论: 如何将数学对象转化为矩阵或线性变换?

1. 复数 $a+b\sqrt{-1}$ 与二阶实矩阵 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$
2. 数域与有理矩阵: $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mapsto \begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix}$
3. 三元数不存在
4. 四元数的矩阵实现

拓展问题

表示论: 如何将数学对象转化为矩阵或线性变换?

1. 复数 $a+b\sqrt{-1}$ 与二阶实矩阵 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$
2. 数域与有理矩阵: $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\mapsto\begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix}$
3. 三元数不存在
4. 四元数的矩阵实现

拓展问题

(1) Galois 理论: 数域 $\mathbb{F}$ 作为有理线性空间, 其中保持乘法的非零线性变换的全体(*Galois* 群).

拓展问题

表示论: 如何将数学对象转化为矩阵或线性变换?

1. 复数 $a+b\sqrt{-1}$ 与二阶实矩阵 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$
2. 数域与有理矩阵: $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mapsto \begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix}$
3. 三元数不存在
4. 四元数的矩阵实现

拓展问题

(1) Galois 理论: 数域 $\mathbb{F}$ 作为有理线性空间, 其中保持乘法的非零线性变换的全体(*Galois* 群).
(2) 模论: 多项式矩阵的想法的由来——主理想整环上的模.

线性函数、双线性函数、二次型与 Euclid 空间

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{对偶空间} & \mathbb{F}^{n\times n} & \\
\text{线性映射} \arrow[r] & \text{线性函数} \arrow[u] \arrow[r] & \text{双线性函数} \arrow[u] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{矩阵合同} \arrow[d] & \text{对称} \arrow[l] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & \text{反对称} \arrow[d] \\
\text{二次型} \arrow[r] & \text{正定二次型} \arrow[r] & \text{Euclid 空间} \arrow[d] & \text{辛空间} \\
 & \text{正交变换} & \text{正规变换} \arrow[l] \arrow[r] & \text{(反)对称变换}
\end{tikzcd}
$$

拓展问题

(1) 利用线性函数 f, g 可以定义双线性函数, 从而得到张量积的概念

拓展问题

(1) 利用线性函数 f, g 可以定义双线性函数, 从而得到张量积的概念
(2) 特殊集合如矩阵 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的特殊双线性函数: 对称、非退化、不变性

拓展问题

(1) 利用线性函数 f, g 可以定义双线性函数, 从而得到张量积的概念
(2) 特殊集合如矩阵 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的特殊双线性函数: 对称、非退化、不变性
(3) 具有不同度量的空间的变换: 各种典型群

拓展问题

(1) 利用线性函数 f, g 可以定义双线性函数, 从而得到张量积的概念
(2) 特殊集合如矩阵 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的特殊双线性函数: 对称、非退化、不变性
(3) 具有不同度量的空间的变换: 各种典型群
(4) *Hilbert* 空间: 完备的内积空间

拓展问题

(1) 利用线性函数 f, g 可以定义双线性函数, 从而得到张量积的概念
(2) 特殊集合如矩阵 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的特殊双线性函数: 对称、非退化、不变性
(3) 具有不同度量的空间的变换: 各种典型群
(4) *Hilbert* 空间: 完备的内积空间
(5) 范数: 线性空间上弱于内积的度量

Thank You

谢 谢!